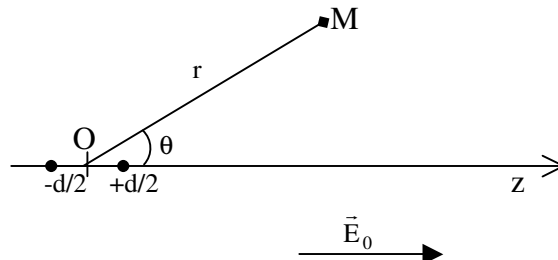


Facoltà di Ingegneria
Esame scritto di Fisica II – V.O. e N.O.
17-9-2002 - Compito A

Esercizio n.1

Due cariche elettriche $+q$ e $-q$ vengono collocate rispettivamente nelle posizioni $z = +\frac{d}{2}$ e $z = -\frac{d}{2}$ (vedi figura) in un campo elettrico uniforme che, in assenza delle due cariche, ha espressione $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$ (essendo \hat{u}_z il versore dell'asse z). In assenza delle due cariche, il potenziale elettrico del punto O, origine dell'asse z , vale V_0 .



Dopo che le cariche $+q$ e $-q$ sono state collocate nelle posizioni suddette, calcolare

- l'espressione del potenziale elettrico $V(M)$ in un punto generico $M \equiv (r, \theta, \phi)$ dello spazio, a distanza $r \gg d$ dal punto O
- l'espressione in coordinate polari del campo elettrico $\vec{E}(M)$ nello stesso punto M

Suggerimento: si ricordi l'espressione del gradiente in coordinate polari: $\vec{\nabla} = \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$

Si risponda quindi alle seguenti domande:

1. Il potenziale elettrico in M è
 - A. la somma del potenziale elettrico del dipolo di momento $\vec{p} = qd \hat{u}_z$ e del potenziale associato al campo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$ (*)
 - B. uguale al potenziale elettrico associato al campo elettrico $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$
 - C. la somma del potenziale elettrico dovuto alla carica $+q$ e del potenziale elettrico dovuto alla carica $-q$
 - D. la somma del potenziale elettrico del dipolo di momento $\vec{p} = q \frac{d}{2} \hat{u}_z$ e del potenziale associato al campo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$
2. Tenendo conto che $r \gg d$, il potenziale elettrico in M dovuto soltanto alle cariche $+q$ e $-q$ vale
 - A. 0
 - B. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$
 - C. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r}$
 - D. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$ (*)
3. Il potenziale elettrico in M dovuto soltanto al campo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$ vale
 - A. 0
 - B. $E_0 r \cos \theta$
 - C. $V_0 - E_0 r \cos \theta$ (*)
 - D. $E_0 r \sin \theta - V_0$
4. Il potenziale elettrico dovuto alle due cariche $\pm q$ ed al campo \vec{E}_0 in M vale
 - A. 0
 - B. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r} + E_0 r \sin \theta - V_0$
 - C. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} + V_0 - E_0 r \cos \theta$ (*)
 - D. $E_0 r \cos \theta$

5. La componente radiale del campo elettrico, \vec{E}_r , vale
- 0
 - $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r^2} + E_0 \sin \theta$
 - $E_0 \cos \theta$
 - $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^3} + E_0 r \cos \theta$
6. La componente zenitale del campo elettrico, \vec{E}_θ , vale
- 0
 - $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r^3} - E_0 \sin \theta$ (*)
 - $-E_0 \cos \theta$
 - $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{r^3} + E_0 \sin \theta$
7. La componente azimutale del campo elettrico, \vec{E}_ϕ , vale
- 0 (*)
 - $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^3} - E_0 r \sin \theta$
 - $-\frac{E_0}{\sin \theta}$
 - $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{r^3} + E_0 \tan \theta$

Esercizio n.2

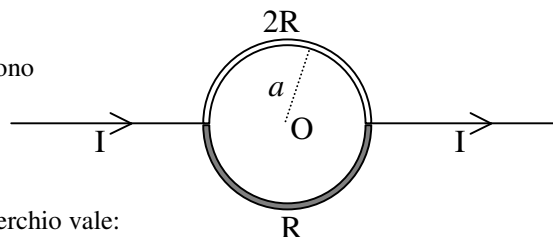
Due fili sono piegati a semicerchio di raggio a e collegati come mostrato in figura. La parte superiore ha resistenza $2R$, quella inferiore ha resistenza R . Al cerchio così ottenuto, vengono connessi due fili rettilinei molto lunghi (vedi figura), nei quali scorre una corrente I .

Trovare il campo magnetico (modulo, direzione e verso) nel punto O centro del cerchio.

Valori numerici: $R=10\Omega$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$, $I=1 A$, $a=50 \text{ cm}$.

Si risponda quindi alle seguenti domande:

8. Le due parti (inferiore e superiore) del cerchio sono
- in serie
 - in parallelo (*)
 - né in serie né in parallelo
 - sia in serie che in parallelo
9. La corrente che passa nella parte superiore del cerchio vale:
- $\frac{I}{2} A$
 - $\frac{I}{3}$ (*)
 - $\frac{2I}{3}$
 - $\frac{I}{4}$
10. La corrente che passa nella parte inferiore del cerchio vale:
- 0.5 A
 - 0.667 A (*)
 - 0.333 A
 - 0.75 A
11. Il campo magnetico nel centro di un semicerchio di raggio a , percorso da una corrente di intensità i , ha modulo



- A. $\frac{\mu_o i}{4a} (*)$
- B. $\frac{\mu_o i}{4\pi a^2}$
- C. $\frac{1}{4\pi\mu_o} \frac{1}{a^2}$
- D. $\frac{\mu_o i}{a}$

12. Il campo magnetico nel centro O del cerchio ha modulo

- A. $3.14 \mu\text{T}$
- B. $87.01 \mu\text{T}$
- C. $54.36 \mu\text{T}$
- D. $0.2094 \mu\text{T} (*)$

13. Il campo magnetico nel centro O del cerchio è

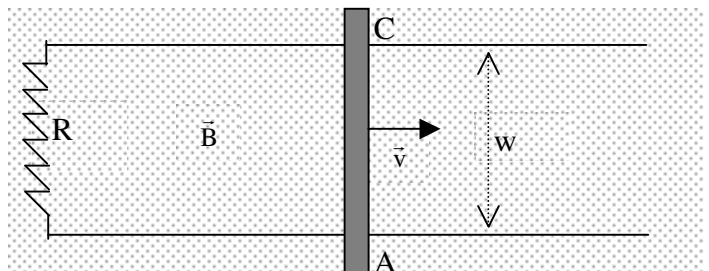
- A. perpendicolare al foglio ed uscente (*)
- B. perpendicolare al foglio ed entrante
- C. parallelo al foglio e rivolto verso destra
- D. parallelo al foglio e rivolto verso sinistra

Esercizio n.3

Nel circuito mostrato in figura, la sbarretta AC, di resistenza trascurabile, scivola parallelamente a se stessa con velocità costante \vec{v} , diretta verso destra. Il circuito è immerso in un campo magnetico \vec{B} uniforme, ortogonale al piano del foglio ed entrante.

Trascurando l'attrito e l'autoinduzione, determinare

- il valore di $v = |\vec{v}|$ affinché nel circuito circoli una corrente di intensità assegnata I
- il verso di I
- la potenza che occorre fornire alla sbarretta per tenerla in moto con velocità costante di modulo v
- la forza magnetica (modulo, direzione e verso) agente sulla sbarretta quando questa si muove con velocità \vec{v}
- la forza totale agente sulla sbarretta quando questa si muove con velocità \vec{v}



Valori numerici: $B=1\text{T}$, $R=2\Omega$, $w=50\text{ cm}$, $I=0.5\text{ A}$.

Si risponda quindi alle seguenti domande:

14. Quando la sbarretta AC si muove con velocità costante \vec{v} , la forza elettromotrice indotta nel circuito ha valore assoluto

- A. $Bvw (*)$
- B. $\frac{1}{2}Bvw$
- C. $\frac{1}{2}B^2vw$
- D. Bw^2

15. Affinché la corrente indotta abbia valore $I=0.5\text{ A}$, la velocità della sbarretta deve avere modulo

- A. $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- B. $2 \frac{\text{m}}{\text{s}} (*)$
- C. $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

D. $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

16. Quando la sbarretta AC si muove con velocità costante \vec{v} , la corrente indotta I circola in verso
 - A. orario
 - B. antiorario (*)
 - C. né in verso orario né in verso antiorario perché è nulla
 - D. sia in verso orario che in verso antiorario perché è alternata
17. La potenza che bisogna fornire alla sbarretta AC per mantenerla in moto con velocità costante \vec{v} vale:
 - A. 0 W
 - B. 0.5 W (*)
 - C. 1 W
 - D. 1.5 W
18. La forza magnetica agente sulla sbarretta che si muove con velocità costante \vec{v} ha modulo
 - A. 0 N
 - B. 0.25 N (*)
 - C. 0.75 N
 - D. 1.25 N
19. La forza magnetica agente sulla sbarretta che si muove con velocità costante \vec{v} è
 - A. ortogonale al foglio ed uscente
 - B. ortogonale al foglio ed entrante
 - C. parallela al foglio ed orientata verso destra
 - D. parallela al foglio ed orientata verso sinistra (*)
20. La forza totale agente sulla sbarretta che si muove con velocità costante \vec{v} ha modulo
 - A. 0 N (*)
 - B. 0.25 N
 - C. 0.75 N
 - D. 1.25 N

Altre domande

21. Se la carica contenuta all'interno di un certo volume V cambia nel tempo, vi è un flusso di carica attraverso la superficie che racchiude il volume V
 - A. Vero (*)
 - B. Falso
22. Il modulo del campo elettrico all'interno di un condensatore piano ideale è la metà del modulo del campo elettrico dovuto ad una delle due piastre.
 - A. Vero
 - B. Falso (*)
23. La differenza di potenziale alle estremità di una batteria può essere maggiore della forza elettromotrice della batteria
 - A. Vero
 - B. Falso (*)
24. Quando una carica si muove da un punto all'altro di una superficie equipotenziale, il lavoro compiuto sulla carica dal campo elettrico è positivo.
 - A. Vero
 - B. Falso (*)
25. Un dipolo elettrico con asse ortogonale alle linee di forza del campo elettrostatico è in equilibrio (stabile o instabile)
 - A. Vero
 - B. Falso (*)
26. Una particella carica con massa m e carica q che si muove con velocità \vec{v} perpendicolare al campo magnetico \vec{B} percorre un cerchio di raggio $r = \frac{qB}{mv}$
 - A. Vero
 - B. Falso (*)
27. Una spira rettangolare percorsa da corrente in un campo magnetico uniforme \vec{B} si orienta in modo che il piano da essa definito sia ortogonale alle linee di forza del campo
 - A. Vero (*)
 - B. Falso

28. Una spira circolare di raggio r è costituita da un pezzo di filo isolato percorso da una corrente I . Il campo magnetico al centro della spira ha modulo B . Lo stesso filo, sempre percorso dalla corrente I , viene avvolto in modo da formare due spire adiacenti di raggio $r/2$. Il modulo del campo magnetico al centro delle due spire vale $2B$.
- A. Vero
B. Falso (*)
29. Un campo solenoidale è un campo la cui divergenza è nulla in ogni punto dello spazio
- A. Vero (*)
B. Falso
30. Il campo magnetico all'interno di un solenoide toroidale percorso da corrente aumenta linearmente con la distanza dall'asse del toroide
- A. Vero
B. Falso (*)

Soluzione:

Esercizio n.1

Il potenziale elettrico nel punto generico M è la sovrapposizione (cioè la somma) del potenziale elettrico delle due cariche e del potenziale elettrico associato al campo. Le due cariche costituiscono un dipolo elettrico di momento di dipolo $\vec{p} = qd\hat{u}_z$ collineare ed equiverso ad \vec{E}_0 . Il potenziale di questo dipolo ha espressione:

$$V_d(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

dove r_+ ed r_- sono le distanze da M delle cariche $+q$ e $-q$ per le quali nell'approssimazione di dipolo valgono le relazioni $r_- - r_+ \approx d \cos \theta$ e $r_- r_+ \approx r^2$.

La differenza di potenziale associata al campo \vec{E}_0 , tra il punto O ed il punto M , è

$$V(O) - V(M) = \int_O^M \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} = \int_O^M E_0 dz = E_0 r \cos \theta$$

da cui si ottiene

$$V(M) = V(O) - E_0 r \cos \theta = V_0 - E_0 r \cos \theta$$

Il potenziale risultante nel punto M vale di conseguenza:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} + V(O) - E_0 r \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} + V_0 - E_0 r \cos \theta$$

Il campo elettrico è l'opposto del gradiente del potenziale: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Usando le coordinate polari si ha:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial}{\partial r} V(M) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^3} + E_0 \cos \theta \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r^3} - E_0 \sin \theta \\ E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V(M) = 0 \end{cases}$$

Esercizio n.2

Usando la prima formula di Laplace $\left(d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$, si vede subito che al campo magnetico in O contribuiscono solo le correnti nei fili a forma di semicerchio. Sempre dalla formula di Laplace si può dimostrare che il campo magnetico generato da una corrente in un arco di apertura θ e raggio r , nel centro dell'arco, ha modulo $B_\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \theta$.

Detto \hat{z} un versore perpendicolare al piano del foglio e con verso uscente, il campo in O dovuto alla corrente I_s nel semicerchio superiore risulta $\vec{B}_s = -\frac{\mu_0 I_s}{4a} \hat{z}$, mentre il campo in O generato dalla corrente I_l nel semicerchio inferiore

vale $\vec{B}_s = \frac{\mu_0 I_l}{4a} \hat{z}$: il campo risultante nel centro del cerchio vale quindi $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4a} (I_l - I_s) \hat{z}$

Le correnti I_s ed I_l possono essere ottenute osservando che i due semicerchi sono in parallelo.

La ddp tra le estremità di ciascuno di essi vale:

$$V = R_T I = \frac{2}{3} RI$$

essendo

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \Rightarrow R_T = \frac{2}{3} R$$

Di conseguenza $I_1 = \frac{V}{R} = \frac{2}{3} I = 0.667 \text{ A}$ ed $I_s = \frac{V}{2R} = \frac{1}{3} I = 0.333 \text{ A}$

Sostituendo questi valori nell'espressione del campo magnetico si ha

$$\vec{B} = (0.2094 \hat{z}) \mu\text{T}$$

Il campo magnetico è dunque ortogonale al piano del foglio ed uscente.

Esercizio n.3

Quando la sbarra si muove con velocità costante \vec{v} , la variazione di flusso magnetico nel tempo dt

è $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = -B w v dt$, avendo orientato il contorno (cioè il circuito) in verso antiorario.

La f.e.m. indotta, per la legge di induzione di Faraday, è

$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\Phi}{dt} = B w v$$

e quindi la corrente indotta risulta $I = \frac{B w v}{R}$.

Il verso della corrente indotta è quello del contorno cioè antiorario. Dall'espressione di I si ottiene $v = \frac{IR}{Bw} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

La potenza che occorre fornire alla sbarra per tenerla in moto con velocità v è uguale alla potenza dissipata nella resistenza $P = RI^2 = 2\Omega \cdot (0.5\text{A})^2 = 0.5\text{W}$.

La forza magnetica sulla sbarretta è $\vec{F}_M = I \vec{AC} \wedge \vec{B}$: è perpendicolare ad \vec{AC} ed a \vec{B} , cioè è parallela al piano del circuito, è orientata verso la resistenza R ed ha modulo $F_M = 0.5\text{A} \cdot 0.5\text{m} \cdot 1\text{T} = 0.25\text{N}$

Poiché la sbarra AC si muove con velocità costante, la forza totale su di essa, somma della forza magnetica e della forza esterna, è nulla.